LE SCIENZE PER UN CURRICOLO VERTICALE E INTERDISCIPLINARE: IL CASO DELLA MATEMATICA

Anna Paola Longo
Ex Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
GRIMED (gruppo ricerca matematica e difficoltà)
Ma.P.Es (Matematica, pensiero, esperienza, associazione per la ricerca didattica)
E-mail: alpaca@alice.it

Abstract
Considerazioni su difficoltà e astrazione in matematica nella scuola primaria.

1. Con quale scopo insegnare matematica?

La matematica è difficile, incute paura agli allievi, preoccupa i genitori. Si dice: "la matematica è difficile perché è astratta"! Ma l'astrazione è una caratteristica costitutiva del pensiero e non è detto che prescinda dalla realtà concreta. Dice R. Zan (in una intervista): "la capacità d'astrazione (così come la padronanza del linguaggio matematico e il rigore) non può a mio parere essere considerata una condizione necessaria per l'apprendimento della matematica. E' piuttosto uno degli obbiettivi dell'educazione matematica, aggiungerei uno dei motivi per cui l'insegnamento della matematica viene ritenuto formativo e quindi imposto a un cittadino italiano in tutto il suo percorso scolastico. E' una conquista a posteriori, non un prerequisito"

La domanda verte sulla formazione del pensiero matematico: come permettere a ciascuno di compiere un percorso completo, dalle esperienze iniziali fino al compimento e consolidamento del sapere, con il suo linguaggio specifico, fin dove ciascuno può arrivare.

Il disagio rispetto alla matematica interroga gli insegnanti sul rapporto che instaurano con gli allievi: il significato che trasmettono, la concezione che veicolano di questa disciplina, il buon senso pedagogico. La difficoltà interroga anche i genitori per l'educazione alla tenacia nel lavoro, al gusto del sapere, al piacere dell'indagine e

della scoperta, per la sicurezza affettiva davanti all'errore, per l'abitudine ad accettare la fatica per ottenere risultati positivi.
Selezionerò alcuni elementi, su cui fondare un cammino che inverta la situazione. Mi occuperò principalmente della scuola primaria come luogo fondante dell'apprendimento, luogo delle radici. Data la complessità del tema, non posso mostrare esempi su ogni punto, mi limiterò ad una presentazione sintetica rimandando per gli esempi a testi e articoli vari. Gran parte della riflessione sarà metodologica.

2. Cosa è matematica

2.1 Concezioni della matematica

Il modo di insegnare è conseguenza delle convinzioni sulla natura della disciplina, fondamento della capacità di motivare gli allievi. La concezione oggi prevalente è l'identificazione con il calcolo meccanico, gratuito, complesso, pieno di trabocchetti, staccato dal calcolo mentale e dalle situazioni matematiche in cui si potrebbero apprezzare utilità e bellezza. Quindi una matematica che si impara soprattutto con l'esercizio ripetitivo della memoria, che si percepisce staccata dalla realtà e quindi anche dalla propria persona.
F. Arzarello (1987) segnala che fin dal tempo dei greci la matematica ha avuto due aspetti: uno euristico, intuitivo, intrecciato in profondità con altre discipline, con aspetti fortemente creativi, ed uno più sistematico, in cui si dimostrano i risultati inquadrandoli in teorie "precise". Sottolinea che la riforma Gentile ha tolto spazio alla matematica concettuale privilegiando forme di matematica "basse e rozze" anche nel liceo scientifico. Conclude che nuove idee sull'insegnamento della matematica si sono fatte strada nel dopoguerra (Arzarello, 1978). Stiamo ancora vivendo questo rinnovamento, molto ricco nella ricerca didattica, ma che fa fatica a raggiungere la scuola.

2.2 "Fare" matematica?

Un'altra affermazione comune che non condivido è che bisogna studiare matematica per imparare a ragionare. Ci si dimentica che si dovrebbe imparare a ragionare in tutte le discipline scolastiche. Il "neo" è nel fatto che la ragione viene ridotta, identificando il ragionamento con l'uso esperto del linguaggio scientifico, di cui la matematica è prototipo. La matematica diventa così una tecnica e se ne perde il

cuore, cioè la sua natura di pensiero, nato dall'impatto con la realtà, sia nella storia del sapere umano, sia nella storia personale.
Dunque: agisco, osservo, rappresento, acquisisco immagini mentali, invento oggetti ideali e un linguaggio ad essi adeguato: prende vita una rappresentazione della realtà rispetto ad un punto di vista particolare, condiviso con altri, tendente all'oggettività. Il nodo non è tanto l'astrazione, quanto il legame con la realtà, fondamento del significato, ed una troppo precoce separazione degli aspetti linguistici e formali della matematica dai <u>contesti</u> che li generano (scientifici, storici, geografici, ecc.), come se l'astrazione potesse autogiustificarsi. In questa esigenza è il fondamento dell'interdisciplinarità.
H.Freudenthal concepisce la matematica stessa come azione: "la necessità della certezza nella scienza non viene soddisfatta con l'accettazione delle cose come garantite: la certezza deve essere cercata e garantita, ed in matematica ciò si ottiene con una attività mentale del tutto particolare. Ed è questa attività mentale, piuttosto che i contenuti, che caratterizza la matematica... La matematica è un'attività in senso del tutto diverso dalla matematica che è stampata sui libri o che sta nelle menti... Ogni ricercatore, ogni produttore di matematica ammetterà facilmente che la matematica è un'attività, la sua propria attività che produce dei risultati... Quando parlo di prodotti dell'attività matematica non intendo parlare in senso stretto di nuove proposizioni e teoremi. Vorrei includere anche dimostrazioni e anche notazioni, abbozzi scritti e pensati. Il leggere matematica ed ascoltarla è pure matematica, è l'attività matematica di riprodurre ciò che ci è stato offerto, come se fosse prodotto da noi" (Freudenthal, 1994).
Una delle grandi scoperte della scienza cognitiva contemporanea è che le nostre idee ricevono forma dalle nostre esperienze corporee. Lakoff e Núñez (2005) indagano su come il sistema delle idee matematiche sia fondato indirettamente sulle esperienze corporee. Essi parlano di "embodied cognition" che costituisce la scienza dei processi cognitivi intesi come basati sulla nostra fisicità di esseri umani, sia per quanto riguarda il corpo che il cervello.

2.3 Reinvenzione guidata
La proposta didattica di Freudenthal è nota come "reinvenzione guidata". Essa valorizza al massimo sia lo studente che l'insegnante, entrambi protagonisti ed alleati in un lavoro comune. Parlare di ap-

prendimento come "invenzione" indica che chi apprende è un protagonista attivo, ma non significa che costruisca autonomamente il proprio sapere! L'insegnante è anche lui protagonista, propone e organizza le esperienze attraverso cui gli allievi devono passare, attento osservatore del percorso di ciascuno, guida per la formazione del pensiero (astratto) nel passaggio dall'esperienza alla concettualizzazione. Siamo ben lontani dal costruttivismo: l'allievo non impara solo perché passa attraverso esperienze (esperimenti, giochi, racconti). La guida dell'adulto è fondamentale per coglierne gli schemi contenuti, convogliandoli a diventare schemi matematici. Per questo Freudenthal parla di "re-invenzione guidata".

3. Racconto di una osservazione diretta

Ma come pretendere di giudicare senza cercare conferme nell'esperienza? Ho conosciuto una ragazzina di seconda media che, da sempre in difficoltà in matematica, ha accettato di fare un percorso con me. Sintesi del nostro incontro di ieri. Devo capire cosa sa e cosa sa fare, ho bisogno di osservarla mentre lavora, perciò partiamo dal suo compito.

Risolve l'equazione ¾ *1/x = 9/7 scrivendo subito il risultato, senza accennare a fare calcoli. Io, con le mie abitudini "antidiluviane", avrei fatto qualche passaggio, invece di usare una formuletta memorizzata. Non ne capisco l'utilità, ma non voglio scoraggiarla, perciò dico solo: verifichiamo! E non è facile intenderci. Sostituisci il tuo risultato alla lettera x e vediamo se l'uguale si realizza! Perfetto, è proprio vero, ma perché? Non risponde e mi guarda, come per dire: che domanda, è così perché è così! Altri esercizi simili, altre regole particolari da memorizzare e tanti errori nei calcoli. (E' brava o no? Non so ancora rispondere). Andiamo avanti: un esercizio chiede di trovare il rapporto tra due grandezze omogenee: 24g e 6g. Bene, cosa è il rapporto? Non lo so! E se tu volessi usare il libro per scoprirlo? Allora lei è perfetta, scorre l'indice, trova la pagina. Le chiedo di leggere. "Un giocatore fa 7 lanci, 3 lanci hanno esito positivo, sono 3 su 7, che si può scrivere 3/7". Benissimo, ma se calcolassimo (come siamo abituati a fare) il valore della frazione 3/7 avremmo un numero decimale, mentre i tiri possono essere solo un numero intero. Da qui cominciamo ad inoltrarci nel terreno minato dei <u>significati</u> dei termini e dei simboli. Il testo parla di numeri natu-

rali, razionali, irrazionali, cosa sono? Mistero! Si parla di rapporto di tiri e non è un tiro, si parla di rapporto di "grandezze omogenee" e si dice che "è" un numero "puro", si parla poi del rapporto di due grandezze non omogenee e si dice che "è" una nuova grandezza. Come intendere in queste espressioni il significato del verbo essere? Non è facile vederne in trasparenza il significato: "essere" in quanto rappresentazione convenzionale fatta per convenienza. Finalmente un esempio: «un cilindro pesa 24 kg, il suo volume è di 4 cm^3, ebbene il rapporto delle due grandezze è un "peso specifico"».
Vedo piombare a precipizio una nuvola nera, che impedisce la comprensione dei termini. Disegno in prospettiva un cubo, attraverso l'immaginazione contiamo il numero di cubetti unitari contenuti in esso, stabilisco un peso per il cubo (supposto omogeneo senza esplicitarlo) e pongo la domanda sul peso di ciascun cubetto unitario, senza introdurre un nuovo termine (il linguaggio è significativo se viene dopo le idee). Chiaro, il peso totale diviso per il numero delle unità contenute nel cubo. Appare plausibile che abbia rintracciato un riferimento con l'unità di misura attraverso l'immagine del cubetto unitario, non so quanto sia credibile per lei che il volume del cilindro si possa misurare con la stessa unità. Non ce la facciamo a disegnare i cubetti nel cilindro. Ce la farà lei ad immaginare e a dare senso? Infatti, c'è un grosso salto concettuale: per definire il volume del cilindro non basta la definizione iniziale di misura, occorrono anche criteri di equivalenza.
Ecco in trasparenza il lavoro della scuola elementare, divenuto uno scheletro di gomma che non sostiene, privo del significato attinente alle singole parole, non identificabile se si prescinde dal riferirsi ad alcuni contesti, anche non matematici. E soprattutto privo della consapevolezza di quello che "è" davvero e di quello che "è perché inventato" dall'uomo per semplificarsi la vita, costruendo modelli su cui ragionare. Non è una pura formalità, il fascino del sapere non viene dal sapere in sé, ma dalla conoscenza della realtà che ci permette di acquisire.
Osserviamo insieme due righelli, il primo rosso e il secondo verde, cosa esprime il rapporto della lunghezza del primo rispetto al secondo? Se dico che questo rapporto è 3, cosa immagini? Quale è il righello più lungo? Il rosso è 3 volte quello verde. E se fosse ½? Allora il righello rosso sarebbe metà del verde.

Procediamo per analogia immaginando oggetti che non vediamo, se dico che una strada è lunga 8 metri e un'altra è lunga 160 metri, quale è il rapporto della prima rispetto alla seconda? Risposta immediata: 160 : 8 = 20. Ma perché non 8:160 = 1/20 ? La prima strada è 1/20 della seconda, mentre la seconda strada è 20 volte la prima.
Eccoci di nuovo nel fosso. Ha ragione Carmen Chamorro! Se disegni un segmento AB piuttosto lungo e un segmento CD molto più corto e chiedi la misura di CD rispetto ad AB (cioè del corto rispetto al lungo), i ragazzi, misureranno tutti il lungo rispetto al corto, condizionati da immagini e abitudini (Chamorro, 2003).
Allora mi sovviene: quante volte abbiamo spiegato la misura dicendo che riportiamo su un "qualsiasi" segmento l'unità di misura e constatiamo quanti multipli dell'unità possiamo riportare! Ma i disegni sono poi tutti dello stesso tipo: l'unità entra nell'oggetto da misurare e c'è perfino un avanzo, comodo per procedere ad un passaggio successivo. Ecco un pasticcio originato dalle abitudini didattiche, anche se inconsapevoli. Oggi nella letteratura specifica è chiamato "ostacolo didattico". In queste condizioni, numeri decimali e frazioni restano per la nostra ragazzina segni muti, non idonei a rappresentare la realtà.

4. Un dramma in atto

Ecco svelarsi i termini di un dramma in atto: astrazione intesa a scuola come livello iniziale, separato dalla concretezza, in cui si entra imitando l'insegnante e non come esito di un cammino personale che produce immagini mentali, strumenti utili alla rappresentazione di ciò che si ha davanti e quindi alla comprensione di relazioni e proprietà, passo verso l'elaborazione di idee matematiche. L'astrazione è fornita prefabbricata, non concepita come pensiero prodotto da un lavoro. Problemi intesi non come strumenti di formazione della conoscenza, ma come situazioni stereotipate, schematiche, decontestualizzate, mentre i significati vivono e si riconoscono nei contesti. I quaderni si riempiono di segni grafici ripetuti in modo meccanico. Manca la consapevolezza che alcune parole di uso comune sono utilizzate in matematica con un significato specifico, irrigidito, cercando di evitare la polisemia. Insegnamento frontale o comunque solo verbale, che non concede agli allievi il tempo per la ricostruzione personale e la possibilità di accesso al significato attraverso i sensi. Non va bene, non solo per la nostra ragazza, ma per tutti, perché siamo convinti con San Tommaso che: “nihil est in intellectu quod non fuerit prius in sensu”. E provoca la convinzione che la matematica non è per te, non ce la fai a entrare, a trovare un punto di attacco.

5. Entriamo in classe

5.1 Conoscenza implicita ed esplicita

Quando un bambino inizia il suo cammino a scuola, non è estraneo al pensiero matematico, anche se non ne padroneggia ancora gli aspetti formali, i simboli e il linguaggio. Il suo pensiero (insieme matematico e scientifico) è nato nelle esperienze di vita e di gioco, ma lui non se ne rende conto: vive infatti in modo unitario e indifferenziato la sua esperienza di vita, osservando con curiosità, cercando di prevedere gli effetti, producendo ipotesi, giocandosi in prima persona in tentativi spesso reiterati con tenacia, producendo rappresentazioni di vario tipo, concrete e mentali.

Sull'inizio, segnalo alcune considerazioni di G. Vergnaud (1994): “Occorre sottolineare che la nozione di rappresentazione non si riduce alle nozioni di simbolo o di segno, in quanto implica anche la nozione di concetto: lo studio del numero lo dimostrerà chiaramente poiché la struttura simbolica del numero è distinta dal numero stesso. E' un'idea universale, di cui gli educatori devono assolutamente convincersi, che la rappresentazione non si riduce ad un sistema simbolico che richiama direttamente il mondo materiale, cioè ai significanti che rappresentano direttamente gli oggetti materiali. Se la conoscenza si elabora lentamente, con leggi di sviluppo che psicologi e pedagogisti devono studiare, è proprio perché essa riflette l'attività del soggetto nel mondo materiale e non soltanto il mondo materiale di per se stesso. Il simbolo non è che la parte direttamente visibile dell'iceberg concettuale; la sintassi di un sistema simbolico non è che la parte direttamente comunicabile del campo di conoscenza che esso rappresenta. Questa sintassi non avrebbe nessun valore senza la semantica che l'ha prodotta, cioè senza l'attività pratica e concettuale del soggetto nel mondo reale” (Vergnaud, 1994, pag. 24,25).

Siccome siamo abituati a identificare il sapere scientifico con il linguaggio formale, non riconosciamo il sapere del bambino finché non rientra nei nostri schemi. Ma se abbiamo stima per questo coraggioso esploratore, il primo passo sarà aiutarlo ad ampliare la sua conoscenza "in atto" (prodotta dall'esperienza, dall'agire) (Vergnaud, 1995), cioè l'iceberg concettuale di cui sopra, per condurlo successivamente alla consapevolezza, all'esplicitazione.

5.2 Descrivere e rappresentare

Per avviarci verso gli aspetti formali, istituzionali, rispettando la crescita del pensiero personale e non solo la ripetizione di un pensiero estraneo al soggetto (che chiamerei astruso, più che astratto), le prime capacità da incrementare nel bambino sono l'osservazione, la descrizione, la rappresentazione, la riflessione su azioni e relazioni, che successivamente saranno trascritte con il linguaggio simbolico (suddividere un foglio in parti uguali, contare per gruppi, aggiungere, togliere, utilizzare piegature della carta per ricavare un quadrato da un rettangolo, per rendere visibile la bisettrice di un angolo, ecc.) . Se impostiamo fin dall'inizio l'insegnamento/apprendimento della matematica come una "reinvenzione guidata", l'analogia con la ricerca scientifica ci illumina: prima ci saranno l'esperienza e i problemi e solo in un secondo momento ci sarà il linguaggio formale e gli esercizi ripetitivi per fissare l'apprendimento. Lo studio di contesti, necessario a comprendere i problemi, avvicina la matematica ad altre discipline: "Non esistono ambiti che non consentano di esercitare l'intelligenza matematica del bambino....è possibile analizzare le relazioni di parentela e le loro proprietà (padre, madre, zio, nipote, nonno, antenato, discendente, consanguineo, cugino primo, ecc..) a proposito di un argomento storico, come si possono proporre interessantissimi esercizi di classificazione a proposito di una lezione di vocabolario (parole che iniziano con un certo prefisso, parole che hanno una certa desinenza, parole poste nella intersezione, ecc..)" (Vergnaud, 1994, pag. 63).

5.3 Significati e simboli

L'inizio del cammino della conoscenza è la scoperta di significati, che darà senso ai simboli, e che avviene immergendosi in situazioni interessanti, di cui si può iniziare a parlare anche con il linguaggio comune: come per esempio il mercato, la fabbrica, il cibo, i tessuti, la carta, il tempo. Successivamente per avviarsi verso la rappresentazione matematica, il primo passaggio utile è "raccontare" la situazione (vissuta, immaginata, letta, ascoltata, mimata) con un disegno o con le parole comuni. Il secondo passaggio è rappresentarla con simboli personali, rendendo più schematica la situazione. Una volta imparato a simbolizzare (cioè l'azione di simbolizzare), si è pronti per assumere come propri i simboli convenzionali, condividendone i significati. Il passaggio dalla lingua comune all'espressione matematica si presenta come una traduzione: "acquisto due caramelle e poi altre cinque caramelle, quindi ho acquistato sette caramelle"; trascrizione, 2+5=7. I segni 2, 5 , 7 rappresentano quantità, il segno "+" rappresenta l'azione di aggiungere (concretamente o nella mente), il segno "=" indica l'uguaglianza di due quantità, in questo caso indica "il risultato dell'operazione". A. Davoli (2009) illustra come questo processo, opportunamente interpretato, è alla base dell'insegnamento dell'aritmetica La specificazione "caramelle", si può togliere perché ci riferiamo sempre e solo alle caramelle. Più complesso sarà memorizzare nei calcoli il significato di ciascun numero, questione che conduce necessariamente all'introduzione di marche, cioè segni e legende nella moltiplicazione e divisione.

5.4 Invarianze

Quando si riconosce che l'operazione aritmetica di somma tra numeri non è legata al contesto, ma all'azione (riconducibile al mettere insieme) e ad una domanda, si è già fatto un passo nell'astrazione. Si potrà dire di conoscere davvero la somma quando ci si renderà conto, almeno in modo intuitivo, delle sue proprietà. All'inizio si tratta solo del riconoscimento di invarianze nel conteggio, che corrispondono a caratteristiche delle azioni. Solo molto dopo si riconosceranno come invarianze sul piano della forma e sarà dato loro un nome. Le proprietà delle operazioni, infatti, vengono imparate usandole, per esempio con il calcolo in riga e il calcolo mentale, che dovrebbero precedere gli usuali algoritmi. Come ogni scalata difficile, sarà più agevole se fatta in compagnia: mettere in comune le osservazioni, discuterle insieme ai compagni, collaborare nel rilevare errori e correggerli, fino a che una scoperta comune viene identificata. Vivere cioè la lezione come un laboratorio. Anche se siamo partiti dal maneggiare caramelle e dal disegno, ci siamo subito collocati attraverso la rappresentazione sul piano del pensiero, la tanto temuta "astrazione", il cui peso diventerà sempre maggiore man mano che aumenta la generalità del significato di ciò che scriviamo: "2+5=7" resta vero anche se non contiamo mele o dolci ma oggetti effimeri come i rintocchi di una campana, che ci obbligano ad una registrazione.

5.5 Creatività e tentativi

L'insegnante propone situazioni "ricche" (Freudenthal, 1994) contenenti qualche domanda (che si trasformano via via nei classici problemi), chiede ai bambini di rispondere personalmente mettendo in opera la loro creatività (quindi facendo tentativi e verifiche su di essi), lascia che i bambini rappresentino, contino con le dita o con oggetti, e successivamente suggerisce di tradurre il loro operato nel linguaggio specifico, convenzionale. In questo modo i bambini si abituano ad esserci, a porre in atto il proprio "io". Notiamo per inciso che i processi si possono scoprire, mentre le convenzioni vanno comunicate dall'insegnante, giustificandole opportunamente.

6. Il rapporto pedagogico

6.1 Accompagnare senza sostituirsi

Quando un bambino non prende iniziativa, l'insegnante è tentato di sostituirsi a lui. Ma non deve farlo perché rischia di bloccare la sua iniziativa e la sua esperienza personale. Lo scopo non è avere alla fine un bel quaderno, ma l'adesione al lavoro. Deve al contrario provocarlo, intervenire con domande, accompagnare senza sostituirsi. Soprattutto nei casi di difficoltà e di recupero, in cui è essenziale educare l'io ad essere attivo. "Ti faccio vedere, fai come me": può accadere, ed essere utile, solo se l'altro è animato dal desiderio di imparare e se ha gli strumenti per farlo, si trova cioè nella "zona prossimale" rispetto al contenuto trattato (Vigotskij, 1998).
Questo punto apre la questione dei compiti a casa e la richiesta ai genitori di "seguire" il figlio, normalmente interpretata come fornire aiuto per fare i compiti. (Mazzeo, 2001)
Il discorso non vale solo per i bambini piccoli all'inizio della scuola primaria. Pensiamo a quando nella scuola secondaria di primo grado vengono proposte le prime equazioni. L'insegnante può fornire immediatamente delle formule (come visto nel paragrafo 3). Oppure può porre la classe davanti ad un problema: "come fare per

trovare un numero che verifica questa condizione? Quali sono gli strumenti di cui si dispone? Proviamo ad elencarli insieme? Proviamo ad immaginare una situazione che si possa descrivere con questa equazione".
Anche se il contesto è interno alla matematica, si tratta di un vero problema, una domanda effettiva a cui si cerca di rispondere con gli strumenti che si possiedono. Emerge un'idea fondamentale: la ricerca degli strumenti idonei al quesito.
Mi sembra un bel modo per far emergere l'importanza di conoscere le proprietà delle operazioni e motivare il lavoro che si richiede per memorizzarle. Non è vero che in un compito di matematica ci si può muovere come si vuole! La causa di moltissimi errori è creare procedimenti procedendo per analogia di aspetti accidentali. Qualcuno ricorda le proprietà con facilità, altri no: l'allievo compie ugualmente passi in avanti se si supporta la memoria insegnandogli a fare tabelle schematiche riassuntive, che può consultare finché non è in grado di separarsene. Noto che è diverso fornire strumenti già predisposti (mi sono estranei) oppure insegnare a costruirseli da solo (memorizzano il mio sapere).
A scuola, tutto si gioca sulle proposte dell'insegnante. Sappiamo che alcune difficoltà si possono prevedere: l'uso dello zero nella divisione, l'uso nei problemi delle operazioni tra frazioni o il confronto di decimali. Attraverso tentativi e osservazione sistematica degli allievi si può trovare una via di accesso al pensiero che venga incontro alle difficoltà personali.
Il primo piano di lavoro è la costruzione nella mente dell'oggetto ideale (numero, forma, operazione, ecc.), successivamente ci sarà il nome e poi l'acquisizione dell'operatività. Molti casi di difficoltà si risolvono dando tempo e insegnando un metodo di studio, infatti non sempre è utile il ricorso al piano intuitivo con i suoi esempi concreti. Per esempio si capisce l'uso dello zero solo se si riflette su moltiplicazione e divisione sul piano formale, mentre il rimando all'intuizione è fuorviante, come si verifica parlando con gli studenti.

6.2 Esito e procedimento

Per essere incisivo, l'insegnante non deve preoccuparsi solo dell'esito, ma soprattutto del modo di procedere di ciascun alunno, che diventerà poi stabilmente il metodo di studio, perché è su questo che la scuola deve incidere. Per ottenerlo, deve abituarsi ad osservare ciascun bambino al lavoro e in base all'osservazione fare domande e proposte, valutare l'esito del compito ed eventualmente cominciare di nuovo un ciclo di osservazione, proposta, verifica. Per insegnare come si studia, si devono chiedere esplicitamente ai bambini i passi che producono conoscenza certa e significativa, tra cui chiedere, fin da piccolissimi, di esporre i motivi delle loro scelte, dei loro procedimenti (naturalmente, con il loro linguaggio, anche se ancora maldestro) e insegnare a cercare modalità di verifica. Se sono "allevati" in questo modo, dialogano, fanno tentativi, non hanno paura di sbagliare.

6.3 Errore ed osservazione

La paura dell'errore, che blocca l'energia di tanti allievi, viene spesso comunicata dai genitori e dagli insegnanti. C'è un limite netto tra l'errore fatto per imparare e l'errore fatto per trascuratezza. Riporto due interessanti citazioni da (Zan, 2007).

"Evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l'errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza.

In effetti, è dalle nostre teorie più ardite, incluse quelle che sono erronee, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa più grande è imparare da essi" (Popper 2002, p. 242).

"E degli errori propriamente detti, che talora sono in rapporto con manchevolezze delle singole menti, ma nei casi più caratteristici si presentano come tappe del pensiero nella ricerca delle verità, il maestro sa valutare il significato educativo: sono esperienze didattiche che egli persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche ad errare per imparare a correggersi. Tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere" (Enriques, 1936, p.12).

Non è scritto da nessuna parte che conoscere la matematica voglia dire non commettere mai errori! Ascoltiamo la testimonianza di un matematico. "Nel nostro settore non c'è necessità di insistere sugli errori. I bravi matematici, quando li fanno, cosa non troppo infrequente, se ne accorgono presto e li correggono. Per quanto mi riguarda (e come il mio è il caso di molti matematici), ne faccio ben più dei miei studenti: solo che li correggo sempre, in modo che nel risultato finale non ne rimanga traccia alcuna. La ragione di tutto questo è che ogniqualvolta viene fatto un errore, l'intuito (insight) – quella sensibilità scientifica di cui abbiamo già detto – mi avverte che i miei calcoli non hanno quell'aspetto che dovrebbero avere" (Hadamard, 1993). Per lui, è molto più critico il caso di fallimento, quando gli è capitato di fermarsi, per un deficit di intuizione, poco prima di una scoperta importante, che farà poi qualcun altro dopo di lui (pag. 48 e seguenti). Per concludere, occorre di nuovo osservare ciascun allievo e ciascun errore, usando l'errore per spingere avanti la conoscenza. La capacità di osservazione si presenta come una caratteristica ineludibile della figura professionale dell'insegnante.

6.4 Correzione e valutazione formativa

Per imparare dal proprio errore, occorre imparare a giudicarsi. Correggersi significa accettare di aver sbagliato, comprendere il motivo per cui si è sbagliato, talvolta sostituire una nuova abitudine ad una vecchia. L'esperienza ci ha mostrato che queste esigenze possono avere spazio in una correzione interattiva, un dialogo in cui l'insegnante (dopo aver segnalato l'errore) si sforza di far ripercorrere all'allievo i passi fatti senza esporre immediatamente la versione corretta (Longo, Barbieri, Davoli, 2005). Se l'allievo la scoprirà in questo cammino, sarà più probabile che la inglobi nel suo sapere. Esistono però errori così radicati, che la didattica chiama "ostacoli", di cui è molto difficile liberarsi. Sono errori che non bisogna cercare di evitare, ma anzi augurarsi che gli allievi li facciano, altrimenti non se ne libereranno mai (Chamorro, 2003).
Dunque non è interessante né per l'insegnante né per l'allievo evitare sempre e comunque gli errori. La questione veramente importante per gli allievi è come pesano gli errori nella valutazione. E' una domanda a cui l'insegnante non può dare risposta se non impara a distinguere la valutazione formativa dalla valutazione finale. Ho esposto la questione con molti esempi in un articolo a cui rimando (Longo, 2008).

7. Il linguaggio

Affinché gli insegnanti in classe possano prendere le (necessarie) decisioni occorre che approfondiscano le ragioni di ogni passo. Insegnare non è simile ad una produzione industriale, ma ad un lavoro artigianale, è un processo che avviene e si migliora attraverso ten-

tativi e verifiche. C'è bisogno di conoscere la mentalità matematica, il modo con cui si apprende, i punti di forza e i limiti di ciascun bambino. E moltissimo avviene attraverso il linguaggio. Nel senso del parlare insieme, fare domande, dialogare, ricercare la forma migliore per esprimere ciò di cui si sta parlando. Nella cura del linguaggio torna a prendere il primo posto l'evidenza dei significati e della loro trasformazione passando da un contesto ad un altro. La "divisione" di un'eredità non è la "divisione" tra numeri, una "uguaglianza" in campo matematico non è come l'"uguaglianza" di due oggetti reali, il "triangolo" della geometria non è il "triangolo" dei blocchi logici, la "frazione" di un paese non è la "frazione" della matematica. I nomi in matematica vanno usati in modo preciso perché consapevole.
La parola dà forma al pensiero (Longo et alii, 2007). Sperimentiamolo per crederci. Quindi non basta conoscere formule e proprietà. Esercitiamoci nella narrazione, che precede la discussione, nella composizione di testi sulle esperienze fatte, ad esempio nel campo della misura, nell'analisi dei significati di uno stesso termine in contesti diversi.

8. Riepilogando

La conoscenza si fonda sull'esperienza anche in matematica. Fare esperienza vuol dire sporcarsi le mani, attingendo da temi che possono essere ripresi da altre discipline, ma poi giudicare, sintetizzare, trovare una struttura comune a varie situazioni, rappresentare, generalizzare. Anche risolvere un problema può essere un'esperienza, se l'iniziativa personale è coinvolta. Torna in primo piano l'opera dell'insegnante, che da tante rappresentazioni libere fa emergere una rappresentazione convenzionale particolarmente utile e significativa, per esempio lo schieramento su cui si rappresentano bene sia le moltiplicazioni che le divisioni, oppure la rappresentazione "stato – trasformazione – stato" per le situazioni che coinvolgono il tempo, o le marche nelle moltiplicazioni e divisioni. Oppure fa emergere una formula risolutiva come sintesi schematica di tanti procedimenti intuitivi, fa nascere la domanda su come si possa misurare una superficie irregolare, perché il mondo non è fatto solo di poligoni regolari, riporta l'attenzione dal singolo problema alle classi di problemi.
Quando emerge l'idea di approssimazione, ecco che sono alle porte i numeri reali, dunque anche dentro la matematica c'è una possi-

bilità di continuità che potrebbe meglio essere valorizzata, se ogni ordine di scuola fosse attento a iniziare riprendendo le esperienze significative fatte nel livello precedente.
Si apprende se si lavora con metodo, ma il metodo si impara, non al liceo, ma da quando si va a scuola (e anche prima!). Si impara attraverso il modo con cui l'insegnante organizza il lavoro e diventa una posizione personale, una intraprendenza e ordine nel lavoro, un ripensare libero e personale. Per questo è importante che ci siano momenti organizzati in modo diverso, sia di lavoro comune che di lavoro personale.

Bibliografia

Arzarello, F. (1987). *Matematica e linguistica. Idee per un loro sviluppo nelle scuole medie*. Milano: Franco Angeli.

Chamorro, C. (2003). *Didactica de las Matematicas para Primaria.* Pearson Prentice Hall.

Davoli, A. *et alii* (2009). *Il curricolo per competenze dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria: un'esperienza realizzata.* Roma: Armando.

Enriques, F. (1936). *Il significato della storia del pensiero scientifico.* Bologna: Zanichelli.

Freudenthal, H. (1994). *Ripensando l'educazione matematica.* Brescia: La Scuola.

Hadamard, J. (1993). *La psicologia dell'invenzione in campo matematico.* Milano: Cortina.

Lakoff, G. & Núñez, R.E. (2005). *Da dove viene la matematica (Come la mente embodied dà origine alla matematica)*. Torino: Bollati Boringhieri.

Longo, P., Barbieri, S. & Davoli, A. (2005). "Correzione: un processo interattivo tra allievo e docente". In A. Davoli *et al.* (a cura di), *Alunni, insegnanti, matematica (progettare, animare, integrare).* Bologna: Pitagora, 110-115.

Longo, P., Rabaglia, F. & Dodi, L. (2007). "La parola, finestra aperta sul pensiero matematico". In Imperiale, Piochi, Sandri (a cura di), *Matematica e difficoltà: i nodi dei linguaggi.* Bologna: Pitagora.

Longo, P. (2008). *La valutazione in matematica: un processo educativo,* Difficoltà in matematica, vol 5/1, ottobre 2008. Trento: Erickson.

Mazzeo, R. (a cura di) (2001). *Studiare in famiglia (appunti di metodo su come aiutare i figli)*. Castel Bolognese: ITACAlibri.

Popper, K. (2002). *Conoscenza oggettiva. Un punto di vista evoluzionistico*. Roma: Armando.

Vergnaud, G. (1994). *Il bambino, la matematica, la realtà*. Roma: Armando.

Vergnaud, G. (1995). "Schemi teorici e fatti empirici nella psicologia dell'educazione matematica". In C. Bernardi (a cura di), *Sviluppi e tendenze internazionali in didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer-Verlag Italia.

Zan, R. (intervista). *La matematica è difficile perché è astratta?* <http://www.treccani.it/scuola/lezioni/in_aula/matematica/astratto_concreto/zan.html>.